

分层超立方网络的可靠性评估

刘西蒙^{1,2}, 张郁芳^{1,2}, 周书明³, 李小燕^{1,2}

(1. 福州大学数学与计算机科学学院, 福建 福州 350108; 2. 福州大学网络安全福建省高校重点实验室, 福建 福州 350108;
3. 福建师范大学数学与信息学院, 福建 福州 350007)

摘 要: 针对目前关于分层超立方网络的可靠性研究不够系统, 严重制约了其应用和推广的问题, 以分层超立方网络为研究对象, 在得到分层超立方网络相关拓扑性质的基础上, 通过理论推导得到了 n 维分层超立方 (HHC_n) 在 PMC 模型和 MM^* 模型下的 h -额外条件诊断度和 t/s -诊断度。此外, 设计了 HHC_n 在 PMC 模型和 MM^* 模型下的 t/s -诊断算法, 并分析了其时间复杂度。研究表明, HHC_n 的 h -额外条件诊断度是其传统诊断度的约 $h+1$ 倍, t/s -诊断度是其传统诊断度约 $s+1$ 倍。该结果进一步完善了分层超立方网络的可靠性指标, 为其应用和推广提供了重要的理论依据。

关键词: h -额外条件诊断度; t/s -诊断度; t/s -诊断算法; 分层超立方网络; 可靠性

中图分类号: TP301

文献标识码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2021064

Reliability evaluation of hierarchical hypercube network

LIU Ximeng^{1,2}, ZHANG Yufang^{1,2}, ZHOU Shuming³, LI Xiaoyan^{1,2}

1. College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China

2. Fujian Provincial Key Laboratory of Information Security of Network Systems, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China

3. School of Mathematics and Information, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China

Abstract: Aiming at the problem that the reliability research on hierarchical hypercube networks was not yet systematic, which severely restricted its application and popularization, the hierarchical hypercube network was taken as studying object, on the basis of obtaining the relevant topological properties of the hierarchical hypercube network, the h -extra conditional diagnosability and t/s -diagnosability of the n -dimension hierarchical hypercube (HHC_n) network under the PMC model and MM^* model were obtained by theoretical deduction. In addition, the t/s -diagnosis algorithm of HHC_n under the PMC model and MM^* model was designed and its time complexity was analyzed. The research results show that the h -extra conditional diagnosability of HHC_n is about $h+1$ times of its traditional diagnosability, and the t/s -diagnosability of HHC_n is about $s+1$ times of its traditional diagnosability. Those results improve the reliability index of the hierarchical hypercube network and provide an important theoretical basis for its application and popularization.

Keywords: h -extra conditional diagnosability, t/s -diagnosability, t/s -diagnosis algorithm, hierarchical hypercube network, reliability

1 引言

随着多处理器系统规模不断扩大, 处理器发生

故障的情形不可避免。为了确保系统的稳定运行, 需要对处理器进行测试和诊断, 从而修复或更换有故障的处理器, 以提高系统的可靠性。

收稿日期: 2020-09-16; 修回日期: 2020-12-16

通信作者: 李小燕, xyli@fzu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62002062, No.62072109); 福建省教育厅中青年教师教育科研基金资助项目 (No.JAT190031)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.62002062, No.62072109), Education and Scientific Research Project of Young and Middle-aged Teachers of Fujian Provincial Education Department (No.JAT190031)

故障诊断是评估系统可靠性和可用性的关键研究。系统中识别故障处理器的过程称为系统级诊断^[1]。最早的系统级诊断模型由 Preparata、Metze 和 Chien^[1]提出,称为 PMC 模型。PMC 模型通过相邻 2 个处理器互相测试来进行诊断。Maeng 和 Malek^[2]提出了基于比较的 MM 模型,该模型是通过一个处理器把任务发送到与它相邻的 2 个处理器,然后比较它们的测试结果来进行诊断。随后, Sengupta 等^[3]提出了 MM*模型,该模型是 MM 模型的一种特殊情况,在该模型下,每个处理器均对与它有直接物理相连的任意 2 个不同处理器的测试结果进行比较。在系统级诊断中,如果系统可以检测出不超过 t 个故障处理器,则称该系统为 t -可诊断的。在 t -诊断系统中可以实现的 t 的最大值称为诊断度^[1]。由于系统的最小度的限制,传统的诊断度很小。为进一步提高系统的诊断能力,Zhang 等^[4]提出了一种新的度量方法,称为 h -额外条件诊断度,并研究了超立方网络的 h -额外条件诊断度。图 G 的 h -额外条件诊断度(用 $\tilde{\kappa}_h(G)$ 表示)是指在满足 G 中每个无故障分支至少包含 $h+1$ 个顶点的条件下, G 可以保证识别的最大故障顶点数目。Lin 等^[5]研究了一些正则网络在 PMC 模型下的 h -额外条件诊断度($h=1$ 或 2)。Huang 等^[6]分析了交错群图在 PMC 模型下的 h -额外条件诊断度。Liu 等^[7]研究了分层立方网络在 PMC 模型和 MM*模型下的 h -额外条件诊断度。LYU 等^[8]确定了一般正则网络在 PMC 模型和 MM*模型下的 h -额外条件诊断度($h=1$ 或 2)。Sun 等^[9]研究了完全立方网络在 PMC 模型和 MM*模型下的 h -额外条件诊断度。

t/s -诊断策略(即系统最多可以识别出 t 个故障顶点,其中至多 s 个无故障顶点被误诊为故障顶点)是一种十分高效的系统级诊断策略。Somani 等^[10]基于 t/s -诊断策略提出了 t/s -诊断度,并研究了超立方网络和星形网络在 PMC 模型下的 t/s -诊断度; Fan 等^[11]研究了双射连接网络的 t/s -诊断度; Yang 等^[12]提出了立方网络的 $(4m-h)/3$ -诊断算法; Zhou 等^[13]给出了星形网络的 t/s -诊断度; Lin 等^[14]讨论了符合某些条件的正则网络的 t/s -诊断度,并提出了一种 t/s -诊断算法; Liang 等^[15]研究了关于超立方网络在 PMC 和 MM*模型下的 t/s -诊断度和 t/s -诊断算法。此外, Xie 等^[16]提出了关于超立方类网络的时间复杂度较低的 t/s -诊断算法; Li 等^[17]研究了数据中心网络 DCell 在 PMC 和 MM*模型下的

t/s -诊断度。然而,大多数网络在 MM*模型下的 t/s -诊断度和 t/s -诊断算法尚未得到研究。

Malluhi 等^[18]提出了一种新的互连拓扑,称为分层超立方网络,其拓扑结构适用于大规模并行系统,且通信效率较高。目前,关于分层超立方网络可靠性问题的研究较少,严重制约了分层超立方网络的应用和推广,基于此,本文对 n 维分层超立方(HHC _{n} , n -dimension hierarchical hypercube)网络(后文简称 HHC _{n})在 PMC 模型和 MM*模型下的 h -额外条件诊断度和 t/s -诊断度展开研究,设计了相应的 t/s -诊断算法,并分析其时间复杂度。

2 准备工作

2.1 术语与符号

对于以下未定义的图论和网络术语,可以参考文献[19]。网络可以拓扑为图 $G = G(V, E)$, 其中每个顶点 $u \in V$ 表示一个处理器,每条边 $(u, v) \in E$ 表示处理器 u 和 v 之间的连接。在图 G 中,顶点 v 的邻集 $N_G(v)$ 表示在图 G 中与 v 相邻的任意顶点 u 的集合,即 $N_G(v) = \{u \in V | (u, v) \in E\}$ 。类似地,子集 $S \subseteq V$ 的邻集 $N_G(S)$ 表示与 S 中的某些顶点相邻但是不包含 S 本身的顶点的集合。由 S 导出的 G 的子图用 $G[S]$ 表示,其顶点集为 S ,边集为 $\{(u, v) | (u, v) \in E, u, v \in S\}$ 。根据邻域和子集邻集的定义可知, $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ 。当 G 在上下文中语义明确时,为方便起见,将省略下标 G 。顶点 u 在 G 中的度定义为 $d(u) = |N_G(u)|$ 。集合 M 和 N 的对称差集表示为

$$M \Delta N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M) = \{x | x \in M \cup N, x \notin M \cap N\}$$

对于任意子集 $F \subset V(G)$,符号 $G - F$ 表示从图 G 中删除 F 中所有顶点,并删除至少有一个末端顶点在 F 中的边所得到的图。 $G - F$ 的每个极大连通子图称为图 G 的一个连通分支,如果 $G - F$ 是不连通的,则称 F 为点割集。 $G_1 \cong G_2$ 表示 G_1 与 G_2 同构。 $mc(G)$ 表示图 G 的最大连通分支的顶点数目。 $\langle n \rangle$ 表示 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 。图 G 的 h -额外连通度是指使 $G - F$ 不连通,并且剩余的每个连通分支的顶点数目不小于 $h+1$ 的集合 F 的最小基数,用 $\kappa_h(G)$ 表示。 D 表示 PMC 模型或 MM*模型, $\tilde{\kappa}_h(G, D)$ 表示图 G 在 PMC 模型或 MM*模型下的 h -额外条件诊断度。在本文中,“图”“网络”“系统”含义相同。

2.2 PMC 模型和 MM*模型

在 PMC 模型中, 对于系统 $G = G(V, E)$ 中任意 2 个相邻顶点 u 和 v , 当且仅当 u 测试 v 时, $(u, v) \in E$ 。 $G(V, E)$ 中的测试结果集用函数 $\sigma: E \rightarrow \{0, 1\}$ 表示, σ 称为系统症候。用 u 测试 v 的结果表示为 $\sigma(u, v)$ 。当 u 无故障时, 如果 v 也无故障, 则 $\sigma(u, v) = 0$; 否则, $\sigma(u, v) = 1$ 。如果 u 有故障, 则 $\sigma(u, v)$ 的值是不可靠的。

在 MM*模型中, 系统 $G = G(V, E)$ 的比较方案可以刻画为一个多重图 $M(V, L)$, 其中 V 和 L 分别为 G 的顶点集和边集。若 2 个顶点 u 和 v 都与顶点 w 相邻, 则 u 与 v 可以通过 w 进行比较, 即 $(u, v)_w \in L$ 。 $\sigma(u, v)_w$ 表示顶点 w 对 2 个顶点 u 和 v 执行比较的结果。符号 σ 称为系统症候, 定义为图 G 中所有比较结果的集合。当 w 无故障时, 如果 u 和 v 都没有故障, 则 $\sigma(u, v)_w = 0$; 否则, $\sigma(u, v)_w = 1$ 。如果 w 有故障, 则 $\sigma(u, v)_w$ 的值可能为 1 或 0。在 MM*模型中, 如果 $(u, w), (v, w) \in E$, 则 $(u, v)_w \in L$ 。

引理 1^[20] 对于系统 $G = (V, E)$ 中的任意 2 个不同故障子集 F_1 和 F_2 , 当且仅当存在一个顶点 $u \in V - (F_1 \cup F_2)$ 和一个顶点 $v \in F_1 \Delta F_2$ 使 $(u, v) \in E$ 时, F_1 和 F_2 在 PMC 模型下才是可区分的。

引理 2^[3] 对于系统 $G = (V, E)$ 中的任意 2 个不

同的故障子集 F_1 和 F_2 , 当且仅当满足以下条件之一时, F_1 和 F_2 在 MM*模型下才是可区分的。

- 1) 有 2 个顶点 $u, w \in V - (F_1 \cup F_2)$, 并且有一个顶点 $v \in F_1 \Delta F_2$ 使 $(u, w) \in E$ 和 $(v, w) \in E$ 。
- 2) 有 2 个顶点 $u, v \in F_1 - F_2$, 并且有一个顶点 $w \in V - (F_1 \cup F_2)$ 使 $(u, w) \in E$ 和 $(v, w) \in E$ 。
- 3) 有 2 个顶点 $u, v \in F_2 - F_1$, 并且有一个顶点 $w \in V - (F_1 \cup F_2)$ 使 $(u, w) \in E$ 和 $(v, w) \in E$ 。

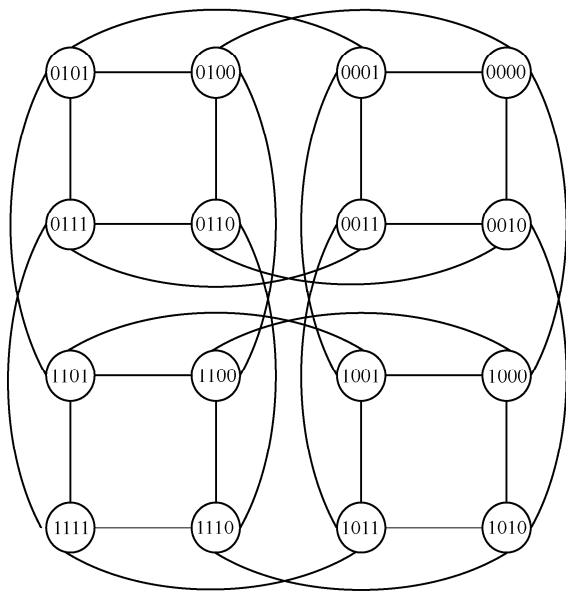
2.3 分层超立方网络

Malluhi 等^[18]提出了分层超立方网络, 它将 n 维带环立方网络^[21]中的环用超立方网络替代。下面介绍分层超立方网络的定义和性质。

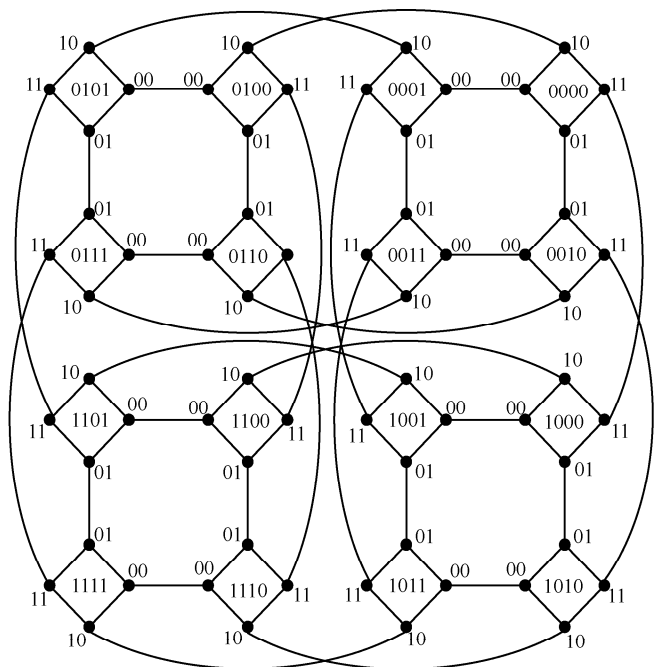
定义 1^[18] n 维分层超立方网络 HHC_n 用图来定义, 其中顶点集为 $\{(X, Y) | X = a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_m, Y = a_{m-1}a_{m-2} \cdots a_0\}$, $a_i \in \{0, 1\}$, $0 \leq i \leq n-1$, $n = 2^m + m$ 且 $m \geq 1$ 。 HHC_n 的顶点连接规则如下。

- 1) (A, B^i) 对于所有 $0 \leq i \leq m-1$ 。
- 2) $(A^{m+\text{dec}(B)}, B)$, 其中 $\text{dec}(B)$ 是 B 的十进制值。

HHC_n 是由 2^n 个顶点组成的 $(m+1)$ -正则二部图, 每个顶点的度数为 $m+1$, 其中 $n = 2^m + m$ 。 HHC_n 由 2^m 簇组成, 每个簇与 m 维超立方网络 Q_m 同构。每个簇用 C_i 表示, $i \in \langle 2^m \rangle$ 。 Q_2^m 结构与 HHC_n 结构如图 1 所示 (其中, $m=2$, $n=6$)。



(a) Q_2^2 结构



(b) HHC_6 结构

图 1 Q_2^2 结构与 HHC_6 结构

引理 3^[22] 当 $m \geq 5$, $n = 2^m + m$, 且 $0 \leq h \leq m - 1$ 时, 记 $S \subset V(\text{HHC}_n)$ 且 $|S| \leq (m+1)(h+1) - \frac{h(h+3)}{2} - 1$ 。如果 $\text{HHC}_n - S$ 是不连通的, 则 $\text{HHC}_n - S$ 中有一个较大的连通分支, 其中至少包含 $2^n - |S| - h$ 个顶点。

引理 4^[22-23] 当 $m \geq 5$, $n = 2^m + m$, 且 $1 \leq h \leq m - 1$ 时, HHC_n 的 h -额外连通度为 $\kappa_h(\text{HHC}_n) = (m+1)(h+1) - \frac{h(h+3)}{2}$ 。

引理 5^[23] 对于任意顶点 $u, v \in V(\text{HHC}_n)$, $n = 2^m + m$, $m \geq 2$, 有 $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$ 。

引理 6^[24] 对于任意集合 $A \subseteq V(Q_m)$, $|A| = h + 1$, 有 $|N_{Q_m}(A)| \geq (h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} - 2h (m \geq 4)$ 。

引理 7 当 $m \geq 4$, $n = 2^m + m$, 且 $0 \leq h \leq m - 1$ 时, 如果 $X \subseteq V(\text{HHC}_n)$ 且 $|X| = h + 1$, 那么 $|N_{\text{HHC}_n}(X)| \geq (h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1$ 。

证明 用数学归纳法证明。当 $|X| = 1$ 时, $|N_{\text{HHC}_n}(X)| = m + 1$ 成立; 假设当 $|X| \leq h$ 时引理成立, 则当 $|X| = h + 1$ 时, 可以分为以下 2 种情况。

情况 1 X 中的顶点均分布在一个簇 C_i 中。

为不失一般性, 令 $X \subset C_i$, 其中 $C_i \cong Q_m$ 。由引理 6 可知, $|N_{Q_m}(X)| \geq (h+1)m - \frac{h(h-1)}{2} - 2h$ 。由于 $V(\text{HHC}_n)$ 中的任意顶点都只有一个除本簇以外的邻接顶点, 因此

$$|N_{\text{HHC}_n}(X)| \geq (h+1)m - \frac{h(h-1)}{2} - 2h + (h+1) = (h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1 \quad (1)$$

情况 2 X 中的顶点至少分布在 2 个不同的簇中, 如图 2 所示。

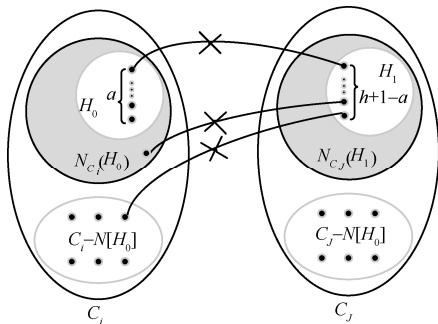


图 2 引理 7 情况 2 示意

令 $X_0 = X \cap C_i$ 且 $|X_0| = a$, $X_1 = X \cap (\text{HHC}_n \setminus C_i)$ 且 $|X_1| = h + 1 - a$, 其中 $1 \leq a \leq h$ 。同时, 令 $J = \langle 2^{2^m} \rangle \setminus \{i\}$ 。通过归纳假设可得

$$|N_{C_i}(X_0)| \geq am - \frac{(a-1)(a-2)}{2} - 2(a-1) = am - \frac{(a+1)a}{2} + 1 \quad (2)$$

因此, 有

$$|N_{C_j}(X_1)| = |N_{\text{HHC}_n}(X_1)| - |N_{C_i}(X_1)| \geq \left[(h+1-a)m - \frac{(h-a)(h+1-a)}{2} + 1 \right] - [h+1-a] \quad (3)$$

结合式(2)和式(3)可得

$$|N_{\text{HHC}_n}(X)| \geq |N_{C_i}(X_0)| + |N_{C_j}(X_1)| \geq am - \frac{(a+1)a}{2} + 1 - [h+1-a] + \left[(h+1-a)m - \frac{(h-a)(h+1-a)}{2} + 1 \right] - (h+1) = (h+1)m - \frac{a(a+1)}{2} - \frac{(h-a)(h-a+3)}{2} \quad (4)$$

此外, 有

$$|N_{\text{HHC}_n}(X)| - \left[(h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1 \right] + 1 - \left[(h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1 \right] \geq (h+1)m - \frac{a(a+1)}{2} - \frac{(h-a)(h-a+3)}{2} - (h-a)(a-1) \geq 0 \quad (5)$$

综上所述, $|N_{\text{HHC}_n}(X)| \geq (h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1$ 。

证毕。

同时, 根据函数的性质可得引理 8。

引理 8 当 $m \geq 5$, $1 \leq h \leq m - 1$ 时, $\psi(h) = (h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1$ 严格单调递增。当 $m \geq 5$, $1 \leq h \leq m - 1$ 时, 有 $\psi_{\max}(m) = \psi(m-1) > \psi(m+1) > \psi(h)$ 。

3 分层超立方网络的 h -额外条件诊断度

本节将对分层超立方网络在 2 个不同的模型下的 h -额外条件诊断度进行研究。

定义 2^[4] 在图 $G = G(V, E)$ 中, 当 $G - F$ 是不

连通的且 $G-F$ 的每个分支至少含有 $h-1$ 个顶点时, 称故障集 F 为 h -额外故障集。

定义 3^[4] 对于图 $G = G(V, E)$ 中任意一对不同的 h -额外故障子集 $F_1, F_2 \subset V$ 满足 $|F_1| \leq t$ 和 $|F_2| \leq t$, 且 F_1, F_2 是可区分的, 则称图 G 是 h -额外条件 t -可诊断的, 使图 G 是 h -额外条件 t -可诊断的 t 的最大值, 称为图 G 的 h -额外条件诊断度, 记作 $\tilde{t}_h(G)$ 。

引理 9^[25] 令 $G = (V, E)$ 表示一个连通图, 当 $h \geq 1$ 时, 如果 $|V| > 2(\kappa_h(G) + h)$, 则 $\tilde{t}_h(G, PMC) \geq \kappa_h(G) + h$ 。

引理 10 当 $m \geq 5, n = 2^m + m$, 且 $1 \leq h \leq m-1$ 时, $\tilde{t}_h(HHC_n, D) \leq (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2}$, 如图 3 所示。

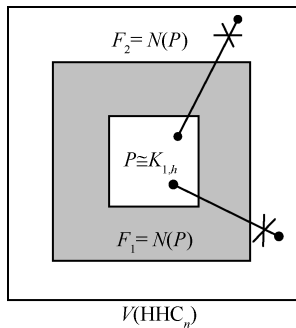


图3 引理 10 示意

证明 记 P 是 HHC_n 中一个簇 C_1 的一个顶点子集, 其中 $HHC_n[P] \cong K_{1,h}$, $F_1 = N(P)$ 且 $F_2 = F_1 \cup P$. 设 $S = N(P) \cap (HHC_n - C_1)$, 通过引理 5 和 HHC_n 的性质可得

$$\begin{aligned} |N(P)| &= |N_{C_1}(P)| + |S| = \\ &= (m-h) + h(m-1) - \frac{h(h-1)}{2} + (h+1) = \\ &= (h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1 \end{aligned} \quad (6)$$

则 $|F_1| = (h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1$, $|F_2| = (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} + 1$, 且 $|V(HHC_n)| - |F_2| \geq h+1$. 因此, F_1 和 F_2 是 2 个不同的 h -额外故障子集, 且 $|F_1| \leq (h+1) \cdot (m+1) - \frac{h(h+1)}{2} + 1$, $|F_2| \leq (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} + 1$. 显然 $P = F_1 \Delta F_2$, 所以 $F_1 \Delta F_2$ 和 $V(HHC_n) - F_2$ 之间不存在任何边的连接. 由引理 1 和引理 2 可得, 在 PMC 模型和 MM* 模型下, F_1 和 F_2 始终是不可区分的. 根

据定义 3 可知 HHC_n 不是 $\left[(h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} + 1 \right] -$ 额外可诊断的. 因此, 引理 10 成立. 证毕。

引理 11 当 $m \geq 5, n = 2^m + m$, 且 $1 \leq h \leq m-1$ 时, $\tilde{t}_h(HHC_n, PMC) \geq (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2}$ 。

证明 当 $m \geq 5, n = 2^m + m$, 且 $1 \leq h \leq m-1$ 时, 有

$$\begin{aligned} |V(HHC_n)| - 2 \left[(h+1)(m+1) - \frac{h(h+3)}{2} + h \right] = \\ 2^n - 2 \left[(h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} \right] > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

因此, 根据引理 4 和引理 9 可知引理 11 成立. 证毕。

根据引理 10 和引理 11, 可以得出定理 1。

定理 1 当 $m \geq 5, n = 2^m + m$, 且 $1 \leq h \leq m-1$ 时, $\tilde{t}_h(HHC_n, PMC) = (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2}$ 。

下面确定 $\tilde{t}_h(HHC_n, MM^*)$ 的下限。

引理 12 当 $m \geq 5, n = 2^m + m$, 且 $1 \leq h \leq \frac{m-1}{4}$

时, $\tilde{t}_h(HHC_n, MM^*) \geq (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2}$, 如图 4 所示。

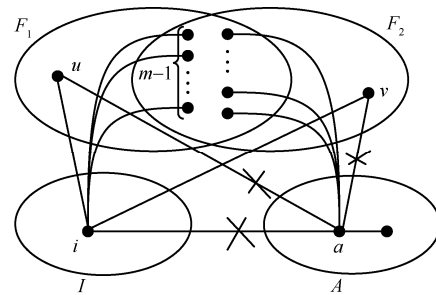


图4 引理 12 示意

证明 假设 $\tilde{t}_h(HHC_n, MM^*) \leq (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} - 1$, 那么在此情况下, 存在 2 个不同的 h -额外故障子集 F_1 和 F_2 , 使 $|F_1| \leq (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2}$ 且 $|F_2| \leq (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2}$, 并且 (F_1, F_2) 是不可区分的. 令 $J = V(HHC_n) - F_1 \cup F_2$, 进而得

$$\begin{aligned} |V(HHC_n)| - |F_1 \cup F_2| \geq \\ 2^n - 2 \left[(h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} \right] > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

这意味着 $J \neq \emptyset$ 。

声明 1 J 不包含孤立的顶点。

假设 $I (\neq \emptyset)$ 是 J 中的一组孤立顶点集。显然，对于任意 $i \in I$ 有 $I \leq 2^{n-1}$ ， $N(i) \subseteq F_1 \cup F_2$ 。此外， $|F_1 \setminus F_2| \geq 1$ ， $|F_2 \setminus F_1| \geq 1$ 。否则，如果 $F_2 \setminus F_1 = \emptyset$ (或者 $F_1 \setminus F_2 = \emptyset$)，则 $F_1 \subseteq F_2$ 。也就是说 $N(i) \subseteq F_2$ ，则 i 是 $\text{HHC}_n - F_2$ 中的一个孤立顶点，这与 $h \geq 1$ 的条件相矛盾。另一方面，如果在 $F_1 \setminus F_2$ 中存在 2 个顶点 u 和 v 使 $(u, i), (v, i) \in E$ ，则 (F_1, F_2) 是可区分的，这与假设相矛盾。如果不存在顶点 $u \in F_1 \setminus F_2$ 使 $(u, i) \in E$ ，则 $\text{HHC}_n - F_2$ 中的 i 是一个孤立顶点，这与 $h \geq 1$ 的条件相矛盾。因此， $N(i) \cap (F_1 \setminus F_2) = 1$ 。同样地， $N(i) \cap (F_2 \setminus F_1) = 1$ 。因此，有

$$\begin{aligned} &|N(i) \cap (F_1 \cap F_2)| = \\ &|N(i)| - |N(i) \cap (F_1 \setminus F_2)| - |N(i) \cap (F_2 \setminus F_1)| = \\ &|N(i)| - 2 = m - 1 \end{aligned} \tag{9}$$

所以， $|F_1 \cap F_2| \geq |N(i) \cap (F_1 \cap F_2)| = m - 1$ 。

令 $A = J \setminus I$ ，接下来证明 $A \neq \emptyset$ 。利用反证法，假设 $A = \emptyset$ ，可得

$$\begin{aligned} 2^n &= |V(\text{HHC}_n)| = \\ &|F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2| + |I| \leq \\ &2 \left[(h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} \right] - (m-1) + 2^{n-1} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{即 } 2^{n-1} \leq 2 \left[(h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} \right] - (m-1)。$$

然而，当 $h \leq \frac{m-1}{4}$ ， $2^{n-1} > 2 \left[(h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} \right] - (m-1)$ 时，与假设相矛盾。因此， $A \neq \emptyset$ 。由于 (F_1, F_2) 是不可区分的，因此 A 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间不存在边的连接。同时，由于 I 是孤立顶点集，因此 I 与 A 之间也不存在边的连接 (如图 4 所示)。因此， $F_1 \cap F_2$ 是 h -额外点割集，即 $|F_1 \cap F_2| \geq (m+1)(h+1) - \frac{h(h+3)}{2}$ 。由 $|F_1| \leq (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2}$ 和 $|F_2| \leq (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2}$ 可知， $|F_1 \setminus F_2| \leq h$ ， $|F_2 \setminus F_1| \leq h$ 。

下面证明 $|I| \leq \frac{m-1}{2}$ 。

当 $m = 5$ 时，每对顶点在 HHC_n 中最多具有 2 个

公共的相邻顶点，因此， $|I| \leq 2 = \frac{m-1}{2}$ 。

当 $m \geq 6$ 时，假设 $|I| \geq \frac{m}{2}$ ，令 $I' \subseteq I$ 且 $|I'| = \frac{m}{2}$ 。根据引理 7 和引理 8，并结合 $|F_1 \setminus F_2| \leq h$ 和 $|F_2 \setminus F_1| \leq h$ 可得

$$\begin{aligned} &|F_1 \cap F_2| = |N_{F_1 \cap F_2}(I)| \geq \\ &|N_{\text{HHC}_n}(I')| - |F_1 \setminus F_2| - |F_2 \setminus F_1| \geq |N_{\text{HHC}_n}(I')| - 2h \geq \\ &\psi \left(\frac{m}{2} - 1 \right) - 2h \geq \frac{m^2}{2} - \frac{m \left(\frac{m-1}{2} \right)}{2} + 1 - 2h \end{aligned} \tag{11}$$

然而当 $m \geq 6$ 且 $1 \leq h \leq \frac{m-1}{4}$ 时，有 $\frac{m^2}{2} - \frac{m \left(\frac{m-1}{2} \right)}{2} + 1 - 2h > (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} - 1$ ，这与假设相矛盾。因此， $|I| \leq \frac{m-1}{2}$ 。

令 $V' = (F_1 \Delta F_2) \cup I$ ，由 $|I| \leq \frac{m-1}{2}$ ， $|F_1 \setminus F_2| \leq h$ 和 $|F_2 \setminus F_1| \leq h$ 可得

$$\begin{aligned} &|V'| - 1 = |F_1 \setminus F_2| + |F_2 \setminus F_1| + |I| - 1 \leq \\ &2h + \frac{m-1}{2} - 1 \leq \frac{2(m-1)}{4} + \frac{m-1}{2} - 1 = m - 2 \end{aligned} \tag{12}$$

另一方面，由 F_1 和 F_2 都是 h -额外点割集， A 和 V' 之间不存在边的连接，且 $|I| + |F_1 \setminus F_2| \geq h+1$ ， $|I| + |F_2 \setminus F_1| \geq h+1$ 可知， $|V'| - 1 = |F_1 \setminus F_2| + |F_2 \setminus F_1| + |I| - 1 \geq h+1$ 。

显然， $N(V') \subseteq (F_1 \cap F_2)$ 。因此，有 $|F_1 \cap F_2| \geq |N(V')| \geq \psi(|V'| - 1) \geq \psi(h+1) = (h+2)m - \frac{(h+1)(h+2)}{2} + 1$ (13)

由 $1 \leq h \leq \frac{m-1}{4}$ 可得

$$\begin{aligned} &|F_1 \cap F_2| - \left[(m+1)(h+1) - \frac{h(h+1)}{2} \right] \geq \\ &\left[(h+2)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1 \right] - \\ &\left[(h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} \right] > 0 \end{aligned} \tag{14}$$

即 $|F_1 \cap F_2| > (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2} \geq |F_1|$ ，这是矛

盾的。声明 1 得证。

根据声明 1, J 不包含孤立的顶点。对于任何一个顶点 $u \in J$, 至少存在一个顶点 $v \in J$ 使 $(u, v) \in E(\text{HHC}_n)$ 。因为 (F_1, F_2) 是不可区分的, 所以 J 和 $F_1 \Delta F_2$ 之间不存在边的连接。因此, $\text{HHC}_n - (F_1 \cap F_2)$ 是不连通的。由于 $\text{HHC}_n - (F_1 \cap F_2)$ 的每个连通分支都具有至少 $h+1$ 个顶点, 因此 $F_1 \cap F_2$ 是 h -额外点割集。由引理 4 可得, $|F_1 \cap F_2| \geq (h+1)m - \frac{h(h+3)}{2} + 1$ 。

同时, 由 $\text{HHC}_n - F_2$ 的每个连通分支都具有至少 h 个顶点, 且 J 和 $F_1 \Delta F_2$ 之间不存在边的连接可知, $|F_1 \setminus F_2| \geq h+1$, 因此, 有

$$\begin{aligned} |F_1 \setminus F_2| &= |F_1 \cap F_2| + |F_1 \setminus F_2| \geq \\ &(h+1)m - \frac{h(h+1)}{2} + 1 + (h+1) = \\ &(m+1)(h+1) - \frac{h(h+1)}{2} + 1 \geq |F_1| + 1 \end{aligned} \quad (15)$$

这是矛盾的, 证毕。

根据引理 10 和引理 12, 可以得出定理 2。

定理 2 当 $m \geq 5, n = 2^m + m$, 且 $1 \leq h \leq \frac{m-1}{4}$

时, $\tilde{t}_h(\text{HHC}_n, \text{MM}^*) = (h+1)(m+1) - \frac{h(h+1)}{2}$ 。

4 分层超立方网络的 t/s -诊断度

本节将研究 HHC_n 在 PMC 模型下以及 MM^* 模型下的 t/s -诊断度 ($m \geq 5, n = 2^m + m, 1 \leq s \leq m-1$)。此外, 还将设计相应的 t/s -诊断算法。

定义 4^[10] 给定一个系统 G , 当系统中的故障顶点数目不超过 t 时, 若对于任意症候 σ , 系统可以将所有故障顶点都分离在一个故障集合 F' 中, 且 F' 包含至多 s 个无故障顶点, 即 $|F'| \leq |F| + s$, 则称这个系统是 t/s -可诊断的。满足系统是 t/s -可诊断的最大的 t 值称为 t/s -诊断度。

定义 5^[12] 给定系统 $G = (V, E)$ 和在 G 中由故障集产生的症候 σ 。若 $T_0(G)$ 是 G 的 0-测试子图, 则需满足 $T_0(G)$ 是 G 的一个子图, 同时 $V(T_0(G)) \subseteq V$ 且 $E(T_0(G)) = \{(u, v) \in E, \sigma(u, v) = \sigma(v, u) = 0\}$ 。

引理 13^[12] 在 PMC 模型下给定一个系统 $G = (V, E)$ 以及在 G 中由故障集产生的症候 σ , 有如下结论。

1) 令 u, v 是 G 中的 2 个相邻顶点。如果

$\sigma(u, v) = \sigma(v, u) = 0$, 则要么顶点 u 和 v 均无故障, 要么顶点 u 和 v 均存在故障。

2) 令 C 为 $T_0(G)$ 的分支, 则 C 中的所有顶点要么都是故障的, 要么都是无故障的。

定义 6^[17] 给定系统 $G = (V, E)$ 及在 G 中由故障集产生的症候 σ 。令 $x \subseteq V$, 顶点 x 的 0-比较子集表示为 $C_0(x) = \{c \in V \mid \exists a \in V, \sigma(x, a)_c = 0\}$ 。 G 的 0-比较子图记为 $T'(G)$, 表示为 G 的一个子图, 其中, $V(T'(G)) \subseteq V$ 且 $E(T'(G)) = \{(x, c) \in E \mid c \in C_0(x), x \in C_0(c)\}$, 如图 5 所示。

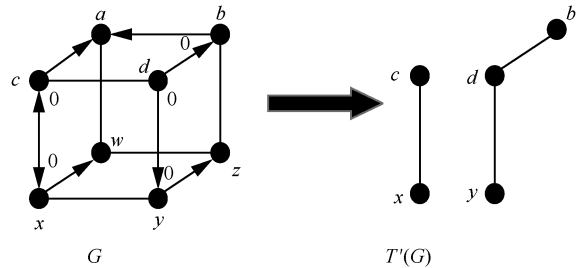


图 5 G 的 0-比较子图 $T'(G)$ 的说明

引理 14^[17] 给定一个至多包含 t 个故障顶点的系统 $G = (V, E)$, 以及在 G 中基于 MM^* 模型由故障集产生的症候 σ , 有如下结论。

1) 如果对于任意 2 个顶点 $x, y \in V$ 且 $(x, y) \in E$ 使 $y \in C_0(x)$ 和 $x \in C_0(y)$, 则 x 和 y 具有相同的状态 (即同为故障或无故障)。

2) 对于连通分支 $R \subseteq T'(G)$, R 中的所有顶点要么都是故障的, 要么都是无故障的。

3) 如果 $T'(G)$ 的连通分支 R 满足 $|V(R)| \geq t+1$, 则 R 中的所有顶点都是无故障的。

引理 15 当 $m \geq 5, n = 2^m + m$ 且 $1 \leq s \leq m-1$ 时, 记 F 为 HHC_n 的一个故障集, 且 C 为 $T_0(\text{HHC}_n)$ 或 $T'(\text{HHC}_n)$ 的最大连通分支。如果 $|F| \leq (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} - 1$, 那么 C 中所有的顶点都是无故障的, 同时 $|V(C)| \geq |V(\text{HHC}_n)| - |F| - s$ 。

证明 记 C' 为 $\text{HHC}_n - F$ 中最大的连通分支。显然, C' 也是 $T_0(\text{HHC}_n)$ 或者 $T'(\text{HHC}_n)$ 中的一个连通分支。根据引理 3, $\text{HHC}_n - F$ 中存在一个最大的连通分支至少包含 $|V(\text{HHC}_n)| - |F| - s$ 个顶点, 则 $|V(C')| = mc(\text{HHC}_n - F) \geq |V(\text{HHC}_n)| - |F| - s$ 。记边集 $E' = \{(u, v) \in E(\text{HHC}_n) \mid u \in F, v \in (\text{HHC}_n - F)\}$ 。因为边集 E' 不属于 $E(T_0(\text{HHC}_n))$ 或 $E(T'(\text{HHC}_n))$, 所以 C' 是 $T_0(\text{HHC}_n)$ 或 $T'(\text{HHC}_n)$ 中唯一的最大连通分支,

且 $|V(C')| = mc(T_0(HHC_n)) = mc(T'(HHC_n))$ 。也就是说, C 是 $HHC_n - F$ 的唯一最大连通分支 C' 。因为

$$|V(HHC_n)| = 2^n > 2 \left[(s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} - 1 \right] + s,$$

所以, 有

$$|V(C)| = mc(HHC_n - F) \geq |V(HHC_n)| - |F| - s \geq |V(HHC_n)| - \left[(s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} - 1 \right] - s > 2 \left[(s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} - 1 \right] + s - \left[(s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} - 1 \right] - s = (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} - 1 \geq |F| \quad (16)$$

根据引理 13 中结论 2) 和引理 14 中结论 2) 可知, C 中的所有顶点均为无故障, 因此引理 15 成立。证毕。

定理 3 当 $m \geq 5, n = 2^m + m$, 且 $1 \leq s \leq m-1$ 时, HHC_n 在 PMC 和 MM* 模型下是 $\left[(s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} \right] / s$ -可诊断的。

证明 设 F 是 HHC_n 的故障集, F' 是所有故障顶点和可疑顶点的集合, C 为 $T_0(HHC_n)$ 或 $T'(HHC_n)$ 的最大连通分支。通过考虑 F 的大小进行证明。

情况 1 $|F| \leq (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} - 1$ 。

根据引理 15 可得

$$|F'| \leq 2^n - |V(C)| \leq 2^n - (2^n - |F| - s) = |F| + s \quad (17)$$

F' 中最多包含 s 个无故障顶点。因此, 在此情况下, 定理 3 成立。

情况 2 $|F| = (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2}$ 。

记 M 为所有可疑顶点的集合且 $M \subseteq F'$, $N(M) \subseteq F$ 。当 $|M| \leq s$ 时, 最坏的情况是 M 中的所有可疑顶点均无故障。此时, F' 中恰好有 s 个无故障顶点。因此, F' 中最多有 s 个无故障顶点, 定理 3 成立。当 $|M| \geq s+1$ 时, 仅需证明 $|N(M)| \geq (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2}$ 。采用反证法,

假设 $|N(M)| \leq (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} - 1$, 根据引理 3, $HHC_n - N(M)$ 不连通且包含一个由小连通分支构成的集合 W 且 $|W| \leq s$ 。然而, 这与 $M \subseteq W$ 且 $|W| \geq |M| \geq s+1$ 相矛盾。因此, $N(M) = F$ 且 $M \cap F = \emptyset$ 。显然, M 中的每个顶点都是无故障的, 因此没有顶点被误诊。从而定理 3 成立。证毕。

下面给出 HHC_n 在 PMC 模型下的 t/s -诊断算法 $t/s - HHC_n - DIAG - PMC$, 如算法 1 所示。

算法 1 $t/s - HHC_n - DIAG - PMC$

输入 HHC_n 故障集 F 产生的症候 σ , 以及故障顶点数目的上限 $|F| \leq t = (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2}$,

其中 $m \geq 5, n = 2^m + m$, 且 $1 \leq s \leq m-1$

输出 故障顶点集 F' 和无故障顶点集 Y , 其中 $F' \cup Y = V(HHC_n)$

1) 初始化 $F' = \emptyset, Y = \emptyset, U = V(HHC_n)$, 其中, \emptyset 表示空集。

2) 检查 HHC_n 中所有的测试结果。 \leftrightarrow 表示 2 个顶点 u 和 v 在 PMC 模型下相互测试。删除测试结果是 $1 \leftrightarrow 0, 0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 1$ 的边, 并将 $0 \leftrightarrow 0$ 的边添加到 E' 中。令 $T_0(HHC_n)$ 为 E' 的导出子图。

3) 获得无故障顶点的集合 C 。通过广度优先搜索在 $T_0(HHC_n)$ 中获得最大连通分支 C , 并将 C 中的所有顶点添加到 Y 中。令 $U = U - Y$ 。

4) 对于前面步骤中每个未诊断的顶点 v , 如果它的相邻顶点 $u \in C$ 且 $\sigma(u, v) = 1$, 则将 v 添加到 F' 中。令 $U = U - F'$ 。

5) 如果 $|F'| = (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2}$, 则将所有 U 中的顶点添加到 Y 中; 否则, 将 U 中的所有可疑顶点添加到 F' 中。

6) 返回故障顶点集 F' 和无故障顶点集 Y 。

7) 结束。

定理 4 当 $m \geq 5, n = 2^m + m$, 且 $1 \leq s \leq m-1$ 时, 令 σ 是 HHC_n 中故障集 F 产生的症候且 $|F| \leq t = (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2}$, 令集合 F' 是执行算法 $t/s - HHC_n - DIAG - PMC$ 得到的故障集, 那么 F' 中最多包含 s 个无故障顶点, 即 $|F'| \leq |F| + s$ 。

证明 根据 $|F|$ 的大小, 考虑以下几种情况。

情况 1 $|F| = (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2}$ 。

根据定理3中情况2可知,如果可疑顶点的数目超过 $s+1$ 个,则所有的可疑顶点都是无故障的。如果可疑顶点的数目少于 s 个,那么定理4显然成立。

情况2 $|F| \leq (s+1)(m+1) - \frac{s(s+3)}{2} - 1$ 。

由引理3可知, $\text{HHC}_n - F$ 中存在一个最大连通分支 C 且 $V(C) \geq V(\text{HHC}_n) - |F| - s$, 那么 HHC_n 中除去最大连通分支 C 外剩余的小连通分支至多包含 s 个顶点。根据 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-PMC}$ 算法, 当 $|V(C)| = \text{mc}(T_0(\text{HHC}_n)) \geq V(\text{HHC}_n) - |F| - s$ 时, C 中的所有顶点被诊断为无故障。在 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-PMC}$ 算法中, 如果 $|F'| = t$, 则 U 中所有顶点被诊断为无故障; 如果 $|F'| \neq t$, 则将所有未诊断(可疑)顶点分离到 F' 中。因此, $F' = V(\text{HHC}_n) - Y$, 其中 Y 被诊断为无故障的顶点的集合。则有

$$\begin{aligned} |F'| &= V(\text{HHC}_n) - Y \leq \\ &V(\text{HHC}_n) - V(C) \leq \\ &2^n - (2^n - |F| - s) = |F| + s \end{aligned} \quad (18)$$

这意味着 F' 最多包含 s 个无故障顶点。因此, 定理4成立。证毕。

定理5 当 $m \geq 5$, $n = 2^m + m$, 且 $1 \leq s \leq m-1$ 时, 算法 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-PMC}$ 的时间复杂度为 $O(N \log N)$, 其中 $N = |V(\text{HHC}_n)|$ 。

证明 算法 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-PMC}$ 主要时间成本在于获取 $T_0(\text{HHC}_n)$ 的最大连通分支 C , 广度优先搜索算法最多运行 $O(N(m+1))$ 次。因为 $\log(2^{m+1}) = m+1 \leq \log(N)$, 所以获取 $T_0(\text{HHC}_n)$ 的最大连通分支 C 的时间复杂度为 $O(N \log N)$ 。其他每一步的时间复杂度至多为 $O(N)$ 。因此, 算法 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-PMC}$ 的时间复杂度为 $O(N \log N)$ 。证毕。

本文提出了一种在 MM^* 模型下通过深度优先搜索 (DFS, depth first search) 定位 HHC_n 的无故障连通分支的算法 DFS-MM^* , 如算法2所示。然后基于 DFS-MM^* 算法, 提出了一个针对 HHC_n 的 t/s -诊断算法 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$, 其中, T 表示无故障的顶点集合, F' 表示通过此算法被诊断为故障顶点的集合, H 表示为未诊断(可疑)的顶点集合。

算法2 DFS-MM^*

输入 HHC_n 中由故障集 F 产生的症候 σ , 顶点集 R 和顶点 $x \in \text{HHC}_n$

输出 S

- 1) $S \leftarrow \{x\}$, $B \leftarrow \{x\}$
 - 2) while $B \neq \emptyset$ do
 - 3) 选择一个顶点 $p \in B$
 - 4) $B \leftarrow B - \{p\}$, $N \leftarrow N_{G[R]}(p) - S$
 - 5) while $N \neq \emptyset$ do
 - 6) 选择一个顶点 $q \in N$ 使 $\sigma(l, q)_p = 0$,
 - $l \in N_{G[R]}(p) - \{q\}$
 - 7) $N \leftarrow N - \{q\}$
 - 8) if (存在一个顶点 $r \in N_{G[R]}(q)$ 使 $\sigma(p, r)_q = 0$)
 - 9) $\{S \leftarrow S \cup \{q\}, B \leftarrow B \cup \{q\};\}$
 - end if
 - end while
 - end while
 - 10) 返回 S
 - 11) 结束
- 算法3** $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$
- 输入** HHC_n 中由故障集 F 产生的症候 σ
- 输出** T, F'
- 1) $T \leftarrow \emptyset$, $F' \leftarrow \emptyset$, $H \leftarrow \emptyset$, $R \leftarrow V(\text{HHC}_n)$
 - 2) while 存在一个顶点 $w \in R$ 使 $\sigma(u, v)_w = 0$, 其中 $u, v \in N_{G[R]}(w)$, do
 - 3) 对于任意顶点 $x \in R$, 使 $\sigma(y, z)_x = 0$, 其中 $y, z \in N_{G[R]}(x)$
 - 4) $S \leftarrow \text{DFS-MM}^*$
 - 5) if ($|S| \leq t$) $\{H \leftarrow H \cup S;\}$
 - 6) else{
 - 7) $T \leftarrow T \cup S$, $N \leftarrow N_{G[R]}(S) - S$
 - 8) while $N \neq \emptyset$ do
 - 9) 对于任意顶点 $u \in N$, $v, r \in T$ 使 $(u, r) \in E(G[R])$ 且 $(v, r) \in E(G[R])$
 - 10) $N \leftarrow N - \{u\}$
 - 11) if ($\sigma(u, v)_r = 1$) $\{F' \leftarrow F' \cup \{u\};\}$
 - 12) else $\{T \leftarrow T \cup \{u\},$
 - 13) $N \leftarrow N \cup (N_{G[R]}(u) - T);\}$
 - end if
 - end while
 - end if
 - end if
 - 14) $R \leftarrow R - (T \cup F' \cup H)$
 - end while

- 15) $H \leftarrow H \cup R$
- 16) if ($|F'| = t$ or $|H| \geq s + 1$) { $T \leftarrow T \cup H$; }
- 17) else { $F' \leftarrow F' \cup H$; }
- end if
- 18) 返回 T , F'
- 19) 结束

定理 6 当 $m \geq 5$, $n = 2^m + m$, 且 $1 \leq s \leq m - 1$ 时, 令 σ 是 HHC_n 中故障集 F 产生的症候且 $|F| \leq t = (s + 1)(m + 1) - \frac{s(s + 3)}{2}$, 令集合 F' 是执行算法 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$ 得到的故障集, 那么 F' 中最多包含 s 个无故障顶点, 即 $|F'| \leq |F| + s$ 。

证明 根据 $|F|$ 的大小, 考虑以下几种情况。

情况 1 $|F| = (s + 1)(m + 1) - \frac{s(s + 3)}{2}$ 。

由定理 3 中情况 2 可知, 若可疑顶点的数目超过 $s + 1$, 则所有可疑顶点都是无故障的。相反, 如果可疑顶点的数目小于 s , 那么定理 6 显然成立。

情况 2 $|F| \leq (s + 1)(m + 1) - \frac{s(s + 3)}{2} - 1$ 。

由引理 3 可知, $\text{HHC}_n - F$ 中存在一个唯一的最大连通分支 K 且 $V(K) \geq V(\text{HHC}_n) - |F| - s$, 那么 HHC_n 中除去最大连通分支 K 外剩余的小连通分支至多包含 s 个顶点。根据 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$ 算法, 当 $V(K) \geq V(\text{HHC}_n) - |F| - s > t + 1$ 时, K 中的所有顶点被诊断为无故障。在 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$ 算法中, 如果 $|F'| = t$, 则 H 中的所有顶点被诊断为无故障, 没有顶点被误诊; 如果 $|F'| \neq t$, 则将所有未诊断(可疑)顶点分离到 F' 中。因此, $F' = V(\text{HHC}_n) - T$, 其中 T 被诊断为无故障的顶点的集合。则有

$$\begin{aligned} |F'| &= V(\text{HHC}_n) - T \leq \\ &V(\text{HHC}_n) - V(K) \leq \\ &2^n - (2^n - |F| - s) = |F| + s \end{aligned} \quad (19)$$

这意味着 F' 最多包含 s 个无故障顶点。因此, 定理 6 成立。证毕。

定理 7 当 $m \geq 5$, $n = 2^m + m$, 且 $1 \leq s \leq m - 1$ 时, $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$ 算法的时间复杂度为 $O(\text{Mlog}N)$, 其中 $N = |V(\text{HHC}_n)|$ 。

证明 在算法 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$ 中, 如果初始顶点 x 在 $\text{HHC}_n - F$ 的最大连通分支中, 则 DFS-MM* 将得到一个满足 $|S| \geq |V(\text{HHC}_n)| - |F| - s > t + 1$ 的顶点集 S , 这一步的时间复杂度至多为

$O(N(m + 1))$ 。在最坏的情况下, 即初始顶点 x 总是在故障集 F 或 $\text{HHC}_n - F$ 的小连通分支集合中, DFS-MM* 的时间复杂度至多为 $O\left((s + 1)(m + 1) - \frac{s(s + 3)}{2} + s\right)$ 。因此, 目前时间复

杂度至多为 $O\left(N(m + 1) + (s + 1)(m + 1) - \frac{s(s + 3)}{2} + s\right)$ 。

算法 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$ 中的其他步骤的时间复杂度至多为 $O(N)$ 。因此, $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$ 的总时间复杂度为 $O(N(m + 1))$ 。又因为 $\log(2^{m+1}) = m + 1 \leq \log(N)$, 所以算法 $t/s - \text{HHC}_n - \text{DIAG-MM}^*$ 的时间复杂度为 $O(\text{Mlog}N)$ 。证毕。

5 比较结果

在系统级诊断中, 如果系统可以检测出不超过 t 个故障处理器, 则称该系统为 t -可诊断的。在 t -诊断系统中可以实现的 t 的最大值称为诊断度, 即传统诊断度^[1]。根据 t -可诊断的定义可知, 分层超立方网络的传统诊断度为 $m + 1$ 。本节对本文研究的分层超立方网络的 h -额外条件诊断度、 t/s -诊断度与传统诊断度进行比较分析, 结果如图 6 所示。

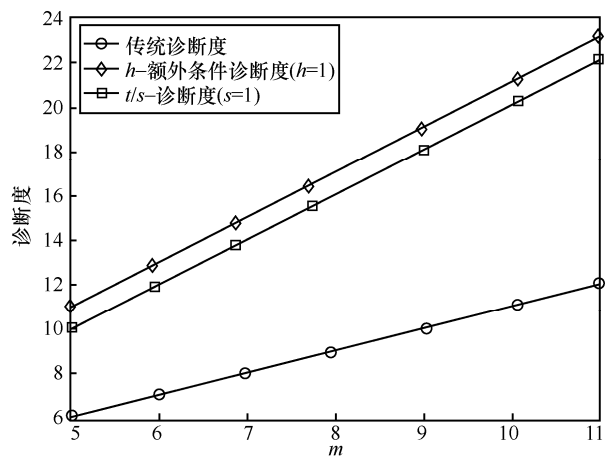


图 6 HHC_n 在 3 种诊断策略下的故障诊断度 ($n = 2^m + m$)

由图 6 可知, 当 $m \geq 5$ 时, 分层超立方网络的 h -额外条件诊断度、 t/s -诊断度均大于传统诊断度, 且分层超立方网络的 h -额外条件诊断度是传统诊断度的 $h + 1$ 倍, t/s -诊断度是传统诊断度约 $s + 1$ 倍。因此, 与传统诊断度相比, h -额外条件诊断度和 t/s -诊断度提高了网络的诊断度, 能更好地评估分层超立方网络的可靠性。

6 结束语

本文的研究成果有利于进一步评估分层超立方网络的可靠性，为分层超立方网络的应用和推广奠定了理论基础。在接下来的工作中，可以考虑使用 t/s -诊断算法监控分层超立方网络中的故障服务器。此外，郭晨等^[26]研究了交换交叉网络在 PMC 模型下的 (t,k) -诊断度，熊茜等^[27]研究了交换超立方网络在 PMC 模型下的 (t,k) -诊断度，受其启发，分层超立方网络在 PMC 模型和 MM*模型下的 (t,k) -故障诊断问题将是下一个研究内容。

参考文献：

- [1] PREPARATA F P, METZE G, CHIEN R T. On the connection assignment problem of diagnosable systems[J]. IEEE Transactions on Electron Devices, 1967, 16(6): 848-854.
- [2] MAENG M, MALEK M. A comparison connection assignment for diagnosis of multiprocessor systems[C]//Proceedings of the 11th International Fault-Tolerant Computing. New York: ACM Press, 1981: 173-175.
- [3] SENGUPTA A, DAHBURA A T. On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach[J]. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11): 1386-1396.
- [4] ZHANG S R, YANG W H. The g -extra conditional diagnosability and t/k -diagnosability of hypercubes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2016, 93(3): 482-497.
- [5] LIN L M, XU L, CHEN R Q, et al. Relating extra connectivity and extra conditional diagnosability regular networks[J]. IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing, 2019, 16(6): 1086-1097.
- [6] HUANG Y Z, LIN L M, XU L, et al. Extra diagnosability and good-neighbor diagnosability of n -dimensional alternating group graph AG_n under the PMC model[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 795: 36-49.
- [7] LIU H Q, ZHANY S Z, LI D. On g -extra conditional diagnosability of hierarchical cubic networks[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 790: 66-79.
- [8] LYU M J, FAN J X, ZHOU J Y, et al. The extra connectivity and extra diagnosability of regular interconnection networks[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 809: 88-102.
- [9] SUN X L, ZHOU S M, GU Z D, et al. Reliability evaluation of complete cubic networks[J]. International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems, 2020, 35(1): 42-56.
- [10] SOMANI A K, PELEG O. On diagnosability of large fault sets in regular topology-based computer systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1996, 45(8): 892-903.
- [11] FAN J X, LIN X L. The t/k -diagnosability of the BC graphs[J]. IEEE Transactions on Computers, 2005, 54(2): 176-184.
- [12] YANG X F, TANG Y Y. A $(4n-9)/3$ -diagnosis algorithm on n -dimensional cube network[J]. Information Sciences, 2007, 177(8): 1771-1781.
- [13] ZHOU S M, LIN L M, XU L, et al. The t/k -diagnosability of star graph networks[J]. IEEE Transactions on Computers, 2015, 64(2): 547-555.
- [14] LIN L M, XU L, ZHOU S M, et al. The t/k -diagnosability for regular networks[J]. IEEE Transactions on Computers, 2016, 65(10): 3157-3170.
- [15] LIANG J R, ZHANG Q. The t/s -diagnosability of hypercube networks under the PMC and comparison models[J]. IEEE Access, 2017, 5: 5340-5346.
- [16] XIE M, YE L C, LIANG J R. A t/k -diagnosis algorithm on hypercube-like networks[J]. Concurrency and Computation: Practice and Experience, 2018, 30(6): 1-8.
- [17] LI X Y, JIA X H, FAN J X, et al. Reliability analysis of data center networks based on precise and imprecise diagnosis strategies[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 809: 189-203.
- [18] MALLUHI Q M, BAYOUMI M A. The hierarchical hypercube: a new interconnection topology for massively parallel systems[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1994, 5(1): 17-30.
- [19] XU J M. Topological structure and analysis of interconnection networks[M]. Berlin: Springer, 2013.
- [20] DAHBURA A T, MASSON G M. An $O(n^2)$ faulty identification algorithm for diagnosable systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1984, 33(6): 486-492.
- [21] PREPARATA F P, VUILLEMIN J. The cube-connected-cycles: a versatile network for parallel computation[J]. Communications of the ACM, 1981, 24(5): 300-309.
- [22] LI X Y, LIN C K, FAN J X, et al. Relationship between extra connectivity and component connectivity in networks[J]. The Computer Journal, 2021, 64(1): 38-53.
- [23] ZHOU S M, LIN L M, XU J M. Conditional fault diagnosis of hierarchical hypercubes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2012, 89(16): 2152-2164.
- [24] YANG W H, MENG J X. Extraconnectivity of hypercubes[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(6): 887-891.
- [25] CHENG E, QIU K, SHEN Z Z. The h -extra diagnosability of the generalized exchanged hypercube[J]. International Journal of Computer Mathematics: Computer Systems Theory, 2020, 5(2): 112-123.
- [26] 郭晨, 肖志芳, 冷明, 等. 交换交叉立方网络在 PMC 模型下的 (t,k) -诊断度研究[J]. 通信学报, 2019, 40(6): 190-202.
GUO C, XIAO Z F, LENG M, et al. (t,k) -diagnosability of exchanged crossed cube under the PMC model[J]. Journal on Communications, 2019, 40(6): 190-202.
- [27] 熊茜, 梁家荣, 马强. 交换超立方网络的 (t,k) -诊断度研究[J]. 通信学报, 2016, 37(3): 190-198.
XIONG X, LIANG J R, MA Q. Research on (t,k) -diagnosability for exchanged hypercube network[J]. Journal on Communications, 2016, 37(3): 190-198.

[作者简介]



刘西蒙（1988-），男，陕西西安人，博士，福州大学研究员，主要研究方向为隐私计算、密文数据挖掘、大数据隐私保护、可搜索加密等。

张郁芳（1997-），女，湖南岳阳人，福州大学硕士生，主要研究方向为互连网络的故障诊断、网络安全等。

周书明（1972-），男，湖北麻城人，博士，福建师范大学教授，主要研究方向为图论与网络优化、并行分布式计算、故障诊断及检测、容错计算等。

李小燕（1989-），女，福建福州人，博士，福州大学讲师，主要研究方向为数据中心网络、网络安全、算法设计与分析等。